

I. Potência de expoente natural

1. Definição

Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n, n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

e, de modo geral, para p natural e $p \geq 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a a .

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{P_1.} \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\mathbf{P_2.} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0 \text{ e } m \geq n$$

$$\mathbf{P_3.} \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\mathbf{P_4.} \quad \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$\mathbf{P_5.} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Na definição da potência a^n , a base a pode ser um número real positivo, nulo ou negativo.

Vejamos o que ocorre em cada um desses casos:

$$1.^\circ \text{ caso} \quad a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0^n = 0 & \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ 0^0 = 1 \end{cases}$$

$$2.^\circ \text{ caso} \quad a > 0 \Rightarrow a^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

isto é, toda potência de base real positiva e expoente $n \in \mathbb{N}$ é um número real positivo.

$$3.^\circ \text{ caso} \quad a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ a^{2n+1} < 0 & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

isto é, toda potência de base negativa e expoente par é um número real positivo e toda potência de base negativa e expoente ímpar é um número real negativo.

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) $(-3)^2$

b) -3^2

c) -2^3

d) $-(-2)^3$

2. Calcule:

a) $(-3)^3$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

i) -2^2

m) 0^7

b) $(-2)^1$

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

n) $(-4)^0$

c) 3^4

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

k) $(-1)^{10}$

o) -5^0

d) 1^7

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$

l) $(-1)^{13}$

p) $-(-1)^{15}$

6. Simplifique as expressões, supondo $a \cdot b \neq 0$.

a) $(a^2 \cdot b^3)^2 \cdot (a^3 \cdot b^2)^3$

b) $\frac{(a^4 \cdot b^2)^3}{(a \cdot b^2)^2}$

c) $[(a^3 \cdot b^2)^2]^3$

d) $\left(\frac{a^4 \cdot b^3}{a^2 \cdot b} \right)^5$

e) $\frac{(a^2 \cdot b^3)^4 \cdot (a^3 \cdot b^4)^2}{(a^3 \cdot b^2)^3}$

7. Se a e b são números reais, então em que condições $(a + b)^2 = a^2 + b^2$?

8. Determine o menor número inteiro positivo x para que $2\,940x = M^3$, em que M é um inteiro.

9. Determine o último algarismo (algarismo das unidades) do número $14^{(14^{14})}$.

10. Calcule o valor das expressões:

a) $\frac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 + 2^{-2}}$

b) $\frac{3^2 - 3^{-2}}{3^2 + 3^{-2}}$

c) $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3}$

11. Calcule:

a) 3^{-1}

f) $(-3)^{-2}$

k) $-\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

p) $(0,75)^{-2}$

b) $(-2)^{-1}$

g) -5^{-2}

l) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

q) $\frac{1}{2^{-3}}$

c) -3^{-1}

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

m) $(0,1)^{-2}$

r) $\frac{1}{(0,2)^{-2}}$

d) $-(-3)^{-1}$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

n) $(0,25)^{-3}$

s) $\frac{1}{(-3)^{-3}}$

e) 2^{-2}

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

o) $(-0,5)^{-3}$

t) $\frac{1}{(0,01)^{-2}}$

12. Remova os expoentes negativos e simplifique a expressão $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$, em que $x, y \in \mathbb{R}^*$.

13. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a) $(5^3)^{-2} = 5^{-6}$

f) $\frac{5^2}{5^{-6}} = 5^8$

b) $2^{-4} = -16$

g) $2^{-1} - 3^{-1} = 6^{-1}$

c) $(\pi + 2)^{-2} = \pi^{-2} + 2^{-2}$

h) $\pi^1 + \pi^{-1} = 1$

d) $3^{-4} \cdot 3^5 = \frac{1}{3}$

i) $(2^{-3})^{-2} = 2^6$

e) $\frac{7^{-2}}{7^{-5}} = 7^{-3}$

j) $3^2 \cdot 3^{-2} = 1$

14. Se $a \cdot b \neq 0$, simplifique $\frac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2}}{(a^{-4} \cdot b^3)^3}$.

15. Se $a \cdot b \neq 0$, simplifique as expressões:

a) $(a^{-2} \cdot b^3)^{-2} \cdot (a^3 \cdot b^{-2})^3$

b) $\frac{(a^5 \cdot b^3)^2}{(a^{-4} \cdot b)^{-3}}$

c) $[(a^2 \cdot b^{-3})^2]^{-3}$

d) $\left(\frac{a^3 \cdot b^{-4}}{a^{-2} \cdot b^2} \right)^3$

e) $\frac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2} \cdot (a \cdot b^{-2})^3}{(a^{-1} \cdot b^2)^{-3}}$

f) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$

g) $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot (a^{-1} - b^{-1})^{-1}$

16. Se $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}^*$, simplifique as expressões:

a) $a^{2n+1} \cdot a^{1-n} \cdot a^{3-n}$

b) $\frac{a^{2n+3} \cdot a^{n-1}}{a^{2(n-1)}}$

c) $\frac{a^{2(n+1)} \cdot a^{3-n}}{a^{1-n}}$

d) $\frac{a^{n+4} - a^3 \cdot a^n}{a^4 \cdot a^n}$