Logarítmo e Função Logarítmica

Prof. Manoel Amaro

YouTube

Prof. Manoel Amaro

Logarítmo - Definição

Prof. Manoel Amaro

Sendo **a** e **b** números positivos, $a \neq 1$, chama-se **logaritmo** de **b** na base **a** o expoente da potência à qual se deve elevar **a** para se obter **b**.

Se $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Na igualdade $\log_a b = x$:

a é a base do logaritmo; **b** é o logaritmando; **x** é o logaritmo de **b** na base **a**.

As restrições impostas à base do logaritmo ($a > 0$ e $a \neq 1$) provêm das condições sobre a função exponencial e garantem que o logaritmo exista e seja único.

A restrição de $b > 0$ é porque $a^x > 0$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, temos também uma condição de existência para o logaritmando, que é $b > 0$.

Propriedades

Prof. Manoel Amaro

- Sendo a e b números reais positivos, a ≠ 1 e x um número real, temos:

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

$$\log_a a^r = r, \text{ pois } a^r = a^r$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Propriedades Operatórias

YouTube
Prof. Manoel Amaro

Logaritmo de um produto

Se **a**, **b** e **c** são números reais, com a > 0, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Logaritmo de um quociente

Se **a**, **b** e **c** são números reais, com a > 0, a ≠ 1, b > 0 e c > 0, então $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Logaritmo de uma potência

Se **a**, **b** e **c** são números reais, com a > 0, a ≠ 1, b > 0 e m $\in \mathbb{R}$, então $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

Logaritmos decimais

Os **logaritmos de base 10** são chamados de **logaritmos decimais**

Por simplificação, representamos $\log_{10} x$ por $\mathbf{\log x}$, para todo x > 0.

Mudança de Base

YouTube
Prof. Manoel Amaro

Se **a**, **b** e **c** são números reais, com a > 0, b > 0, c > 0, b ≠ 1e c ≠ 1, então $\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$

Assim:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Consultando uma tabela de logaritmos decimais como esta

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log x	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954

ou usando calculadoras científicas, em que a tecla log faz o cálculo de qualquer logaritmo na base 10, podemos calcular, por exemplo, $\log_5 2$:

$$\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} \simeq \frac{0{,}301}{0{,}699} \simeq 0{,}431$$

Função Logarítmica

Prof. Manoel Amaro

A função **f**, de]0, +∞[em $\mathbb{R}$, que a todo número $x > 0$ associa o logaritmo de **x**, em uma base **a** ($a > 0$ e $a \neq 1$), é denominada **função logarítmica** de base **a**.

$$f: \,]0, +\infty[\, \rightarrow \mathbb{R}$$

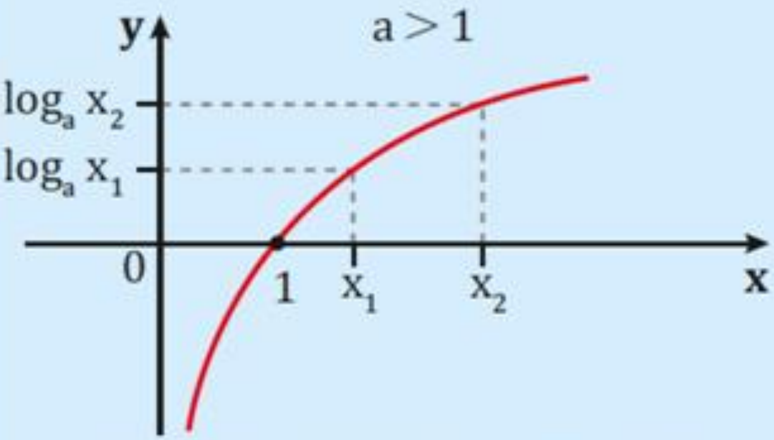
$$x \rightarrow y = \log_a x,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Gráfico da Função

Prof. Manoel Amaro

- $D(f) =]0, +\infty[$
- $Im(f) = \mathbb{R}$

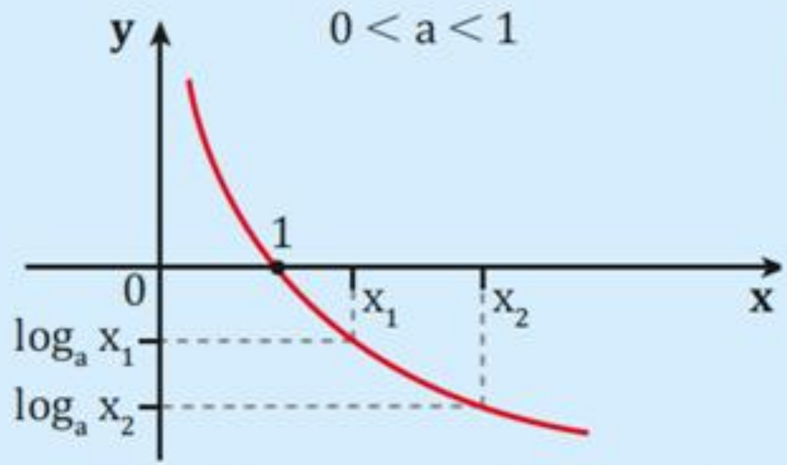
O gráfico de **f** corta o eixo Ox em (1, 0).



Função crescente em $]0, +\infty[$

$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

mesmo sentido



Função decrescente em $]0, +\infty[$

$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

sentidos contrários

Imagens: Zapt

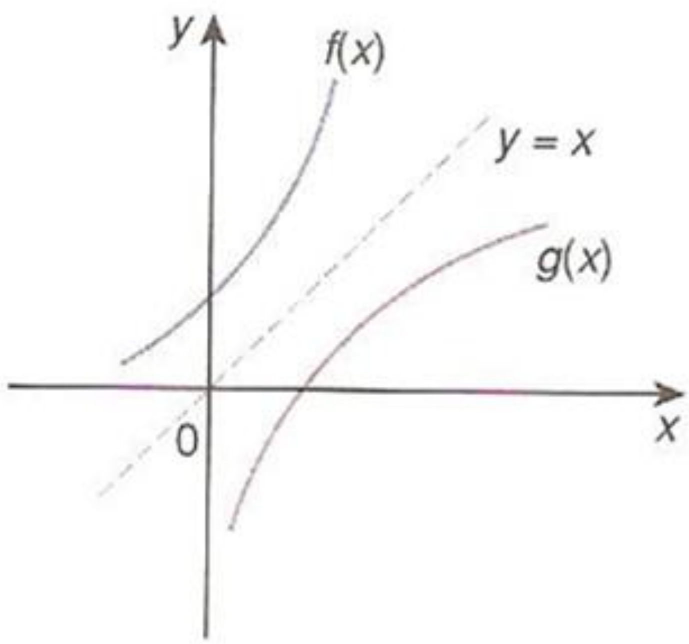
Relação entre as funções Exponencial e Logarítmica

Prof. Manoel Amaro

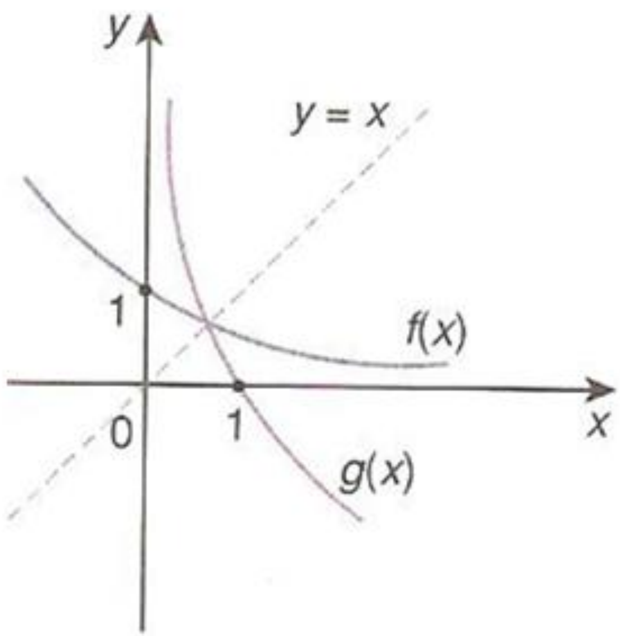
A função $\log_a x$ é a inversa da função a^x.

$f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$

$a > 1$



$0 < a < 1$



Relação entre as funções Exponencial e Logarítmica

YouTube
Prof. Manoel Amaro

Os gráficos das funções $\log_a x$ e a^x são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, indicada pela linha tracejada nas figuras.
Isso ocorre porque as funções exponenciais e logarítmicas são **inversas**

Referência

- MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO – VOLUME I
- Autoras: Kátia Stocco Smole; Maria Ignez Diniz
- Editora: Saraiva